

KLEINIGKEITEN

AUS DEM

MATHEMATISCHEN UNTERRICHT

VON

OTTO HERWEG,

GYMNASIALOBERLEHRER.

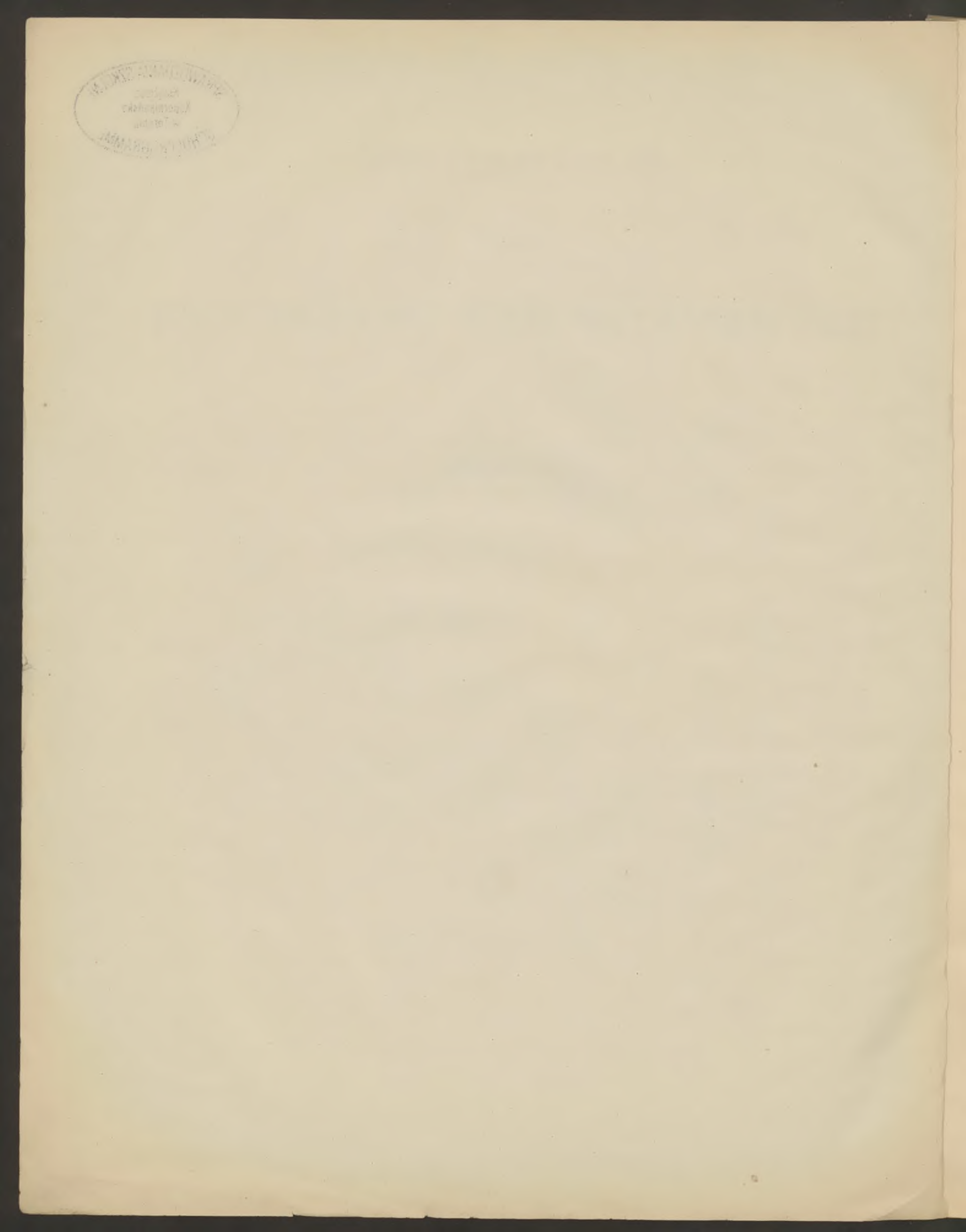
BEILAGE ZUM PROGRAMM DES KÖNIGLICHEN GYMNASIUMS ZU NEUSTADT IN WESTPREUSSEN.

OSTERN 1890.

DRUCK VON E. H. BRANDENBURG & CO. IN NEUSTADT WPR.

1890.

Progr. Nr. 39.



II. Teil. Konstruieren.*)

(Erste Hälfte.)

I. Kapitel.

Der Lehrsatz. Voraussetzen, Behaupten.

0. Konstruieren, und was so drum und dran hängt, ist bekanntlich nicht jedermanns Sache. Das wird sicherlich mancher Lehrer der Mathematik an einzelnen Schülern bitter beklagen, wenn er auch noch so vollkommen seines Amtes walten mag. Doch ist die Klage oft übertrieben. Noch kein Lehrer des Lateinischen hat seine sämtlichen Schüler zu alten Römern gemacht; wozu also übermässiger Gram bei einigen Misserfolgen in der Mathematik? Gleichwohl ist eine mässige Unzufriedenheit selbst bei günstigeren Erfolgen, ich möchte sagen, fast die Pflicht des Lehrers. Denn sie ist der Sporn unablässig auf Mittel und Wege zu erfolgreicherem Schaffen bedacht zu sein. So hat sich denn mancher Fachgenosse seine besonderen Regeln zurechtgelegt, und so sind grösstenteils auch die nachfolgenden Betrachtungen entstanden.

1. Voraussetzung, Behauptung. Es ist, wenn auch nicht in allen Lehrbüchern, so doch beim Unterricht wohl allgemein üblich, dem Beweise eines Lehrsatzes die »Voraussetzung« und »Behauptung« voraufgehen zu lassen. Dieselben enthalten nichts anderes als eine Umschreibung des Lehrsatzes in seiner besonderen Anwendung auf die Figur, an welcher der Beweis geführt werden soll. Diese Umschreibung kann entweder in sprachlich einfacher oder in mathematisch gekürzter Form geschehen. Im ersten Falle heisst es: In der Figur F finde A statt, so behaupten wir, dass auch B stattfindet; im zweiten Falle kurz: Voraussetzung A, Behauptung B. So sehr auch die erste Art ihre Vorzüge hat, da sie namentlich dem Anfänger die wesentliche Bedeutung der Voraussetzung und Behauptung vorführt und einprägt, so ist doch die zweite Art nicht zu verachten, einesteils ihrer Kürze wegen, dann aber auch, weil diese kurze Zusammenstellung bei späterer Anwendung des Lehrsatzes die Form des Beweises darstellt. Es seien z. B. in einem gleichschenkligen Dreieck ABC ($CA=CB$) die Mitteltransversalen AD und BE gezogen und die Kongruenz der Dreiecke ADB und BEA zu beweisen, so schreibt man kurz:

In den $\triangle\triangle$ ADB und BEA ist
1) $AB=BA$**),
2) $BD=AE$,
3) $\sphericalangle DBA=\sphericalangle EAB$,

folglich $\triangle ADB \cong \triangle BEA$.

Dies ist aber nichts anderes als Voraussetzung und Behauptung des benutzten Kongruenzsatzes, wenn der letztere an den genannten Dreiecken zu beweisen wäre. Hiermit ist, nebenbei gesagt, in die Form des Beweises der Gedanke gelegt: Da die Voraussetzung des Kongruenzsatzes zutrifft, so trifft auch die Behauptung zu.

---

*) Der I. Teil (Rechnen) erschien als Beilage zum Programm des Kgl. Gymn. zu Kulm in Westpr. Ostern 1885 Progr. Nr. 26.

**) Vgl. § 13.

2. Was ist die Voraussetzung? Während die Behauptung ziemlich gemeinverständlich ist, so dass ihre Aufstellung keine Schwierigkeiten bietet, wird die Voraussetzung, auf die doch alles ankommt, oft nicht richtig oder nicht vollständig herausgefunden, was manchmal in der besonderen Form des Lehrsatzes, manchmal in der Auffassungsgabe des Schülers seinen Grund hat. Die gewöhnliche Umschreibung oder Begriffsbestimmung ist oft übel angebracht. Sagt man: Die Voraussetzung hat die Bedingung zu enthalten, unter welcher die Behauptung Gültigkeit hat, und fragt dann z. B. nach der Voraussetzung zu dem Satze: »Die drei inneren Winkel eines Dreiecks betragen zusammen zwei Rechte«, so weiss gewöhnlich keiner zu antworten. Fragt man aber: Was für eine Figur muss ich zu diesem Satze zeichnen? so hört man von allen Seiten: Natürlich ein Dreieck. Also heisst die Voraussetzung: ABC (sei) ein Dreieck. Was ist hiernach die Voraussetzung allgemein? Antwort: Die Voraussetzung ist die Beschreibung der erforderlichen Figur, oder genauer die Angabe dessen, was dem Inhalte des Lehrsatzes gemäss der Reihe nach gezeichnet werden muss, um die Behauptung aussprechen zu können. Den Schülern ist dieser Begriff der Voraussetzung sehr bald geläufig, und sie verfehlen bei der geforderten Beschreibung fast nie das Ziel.

3. Die Voraussetzung als Konstruktion. Nach dem Vorhergehenden bedarf es nur noch eines kleinen Schrittes, und wir haben in der Voraussetzung eine wahre Konstruktion, d. h. ein folgerichtiges Entstehenlassen der erforderlichen Figur: wir lassen nämlich die Zeichnung wirklich mathematisch ausführen. Dies ist allerdings bei den ersten Lehrsätzen, solange nämlich die anzuwendenden Hülfsaufgaben noch nicht durchgenommen sind, nicht vollständig möglich. Indessen handelt es sich dabei immer um die Konstruktion von solchen Linien und Punkten, deren Vorhandensein jedem Schüler unmittelbar einleuchtet, und die von jedem mit mehr oder weniger Genauigkeit »nach dem Augenmass« (oder nach vorher — etwa im Anschauungsunterricht — eingeübten, wenn auch noch nicht strenge bewiesenen Methoden) gezeichnet werden können. In solchen Fällen begnügt man sich natürlich mit der Angabe (und Zeichnung) dessen, was gezeichnet werden muss. Bald aber muss auch das Wie zur Geltung kommen, sei es bloss in Worten oder, soweit die Zeit es erlaubt, durch regelrechte mathematische Konstruktion, und zwar in möglichster Anlehnung an die vorhandene Figur, damit von vornherein einer gedankenlos mechanischen Anwendung angelernter Konstruktionsmethoden vorgebeugt wird. Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, dass nach gehöriger Übung bei manchen Sätzen ein näheres Eingehen auf die Konstruktion der Voraussetzung aus Zeitmangel unterbleiben kann.

4. Einen ganz besonderen Anlass zu der Frage, wie der Reihe nach gezeichnet werden muss, hat man dann, wenn der an der Tafel arbeitende Schüler eine zwar im fertigen Zustande richtige, in ihrer Entstehungsweise aber falsche Figur zu Tage fördert. Dieses kommt oft vor bei Umkehrungen von Lehrsätzen. Ist der Satz zu beweisen: »Wenn die eine von zwei Parallelen auf einer Geraden senkrecht steht, so steht auch die andere auf ihr senkrecht« oder in anderer Form: »Wenn eine Gerade auf der einen von zwei Parallelen senkrecht steht, so steht sie auch auf der anderen senkrecht«, so ist zehn gegen eins zu wetten, dass der Schüler*) zuerst eine Gerade zieht und dann zwei Senkrechte auf ihr errichtet (bezw. auf sie fällt), während er entweder eine Gerade, eine darauf Senkrechte und nun erst eine Parallele zur letzteren — oder zwei Parallelen und eine auf der einen Parallelen senkrechte Gerade hätte zeichnen müssen; das Entweder würde mehr der ersteren Fassung des Satzes, das Oder der letzteren entsprechen. Wenn man will, darf man sich jedoch allenfalls damit begnügen, dass der Schüler die richtige Reihenfolge anzugeben weiss.

5. Beispiele. Aus der grossen Zahl der Beispiele — fast jeder Lehrsatz, jeder Übungssatz liefert ein solches — greife ich nur einige auf den letzten Paragraphen bezügliche heraus, ohne denselben hierdurch anderen Beispielen gegenüber einen besonders hohen Wert beimessen zu wollen. Figur 1 zeigt die Konstruktion zu dem Lehrsatze: »Wenn zwei gegen-

*) Wir haben hier einen Fall, wo man sich mit der freihändigen Zeichnung oder Zeichnung nach dem Augenmass begnügen darf oder muss.

überliegende Seiten eines Vierecks einander gleich und parallel sind, so ist das Viereck ein Parallelogramm«. Die Reihenfolge der Konstruktion ist: AB; AC; $\sphericalangle ACD = \sphericalangle CAB$ und zugleich $CD=AB$; AD, BC. Die Figur steht in enger Beziehung zum Beweis. Der Satz: »Sehnen eines Kreises, welche vom Mittelpunkt gleich weit entfernt sind, sind einander gleich« erfordert eine der Figuren 2, je nachdem wir von vornherein zwei gleiche Abstände (Fig. 2a) oder zuerst eine Sehne ziehen (Fig. 2b). Die Sehnen erweisen sich zugleich als Tangenten eines mit dem gegebenen konzentrischen Kreises, was gelegentlich verwertet werden kann. Ist der Peripheriewinkel im Halbkreise bekannt, so leistet Figur 2c, worin OE und F im allgemeinen willkürlich sind, noch bessere Dienste.

6. Die Umkehrung des Lehrsatzes vom Tangentenwinkel kann recht lehrreich werden. Um ein Viereck zu zeichnen, in welchem die Summen je zweier gegenüberliegenden Seiten einander gleich sind, verfährt man etwa folgendermassen: Man bestimmt (Fig. 3) auf $BE=BF$ bezüglich die Punkte A und C im allgemeinen beliebig und beschreibt um C und A bezüglich mit AE und CF als Radien Kreise, die einander in D (D') treffen; man erhält also zwei Vierecke. Die Punkte A und C sind jedoch nicht völlig beliebig; es muss nämlich $FC+AE \geqq AC$ sein; der Grenzfall ist also $FC+AE=AC$. Der Lehrer findet bald, wie eine solche Grenzlage zu finden ist. Errichtet man nämlich — der Leser füge diese Konstruktion selbst hinzu — $EP \perp BE$ und $FP \perp BF$ und beschreibt um P mit dem Radius PE einen Kreis, so stellt jede zwischen BE und BF gezogene Tangente $A'C'$ dieses Kreises das Gesuchte dar. Der Beweis hierfür ist jedem Schüler verständlich, wenn auch die Aufsuchung dieser Beziehung für ihn zu schwierig ist. Für je zwei solche Punkte A' und C' gehen die beiden Vierecke in ein Dreieck über.

Man kann jedoch auch einen etwas anderen, gefälligeren Weg einschlagen. Aus $AB + CD = BC + DA$ folgt nämlich $AB - DA = BC - CD$. Wir nehmen daher drei Ecken A, B, C des Vierecks beliebig, schneiden auf AB und BC gleiche, übrigens aber im allgemeinen beliebige Stücke BG und BH ab und beschreiben um A und C bezüglich mit den Radien AG und CH Kreise, die einander in D (D') begegnen. Auch hier haben wir eine kleine Schranke: es muss $AG+CH \geqq AC$ sein. Für den Grenzfall $AG+CH=AC$ erhält man wiederum statt der beiden Vierecke ein Dreieck, und es berühren dann die Kreise A und C einander in einem Punkte auf AC. Man erkennt, dass in diesem Falle G, H und der gedachte Punkt die Berührungspunkte des Inkreises für das Dreieck ABC sind. Im übrigen sind beide Konstruktionen, wie auch die Darstellung an der nämlichen Figur zeigt, nicht wesentlich von einander verschieden. Die Linien der Figur sind gut verwendbar, um schnell den Mittelpunkt des Berührungskreises zu finden und die Probe auf die Richtigkeit zu machen; zur Probe genügt u. a. die Untersuchung, ob drei Winkelhalbierungslinien durch den nämlichen Punkt gehen.

7. Aus der Lehre von der Proportionalität gerader Linien am Dreieck mögen ebenfalls einige Beispiele Platz finden. Die Figur zu dem Satze: »Eine Gerade, welche zwei Seiten eines Dreiecks in proportionale Stücke teilt, ist der dritten Seite parallel« wird entweder in der Weise gezeichnet, dass man die beiden Seiten mit Hülfe zweier beliebigen Masseinheiten aus einer gleichen Anzahl von gleichen Teilen zusammensetzt und irgend zwei entsprechende Teilungspunkte mit einander verbindet — die Figur entspricht dann derjenigen des Hauptlehrsatzes für kommensurable Teile —, oder wir konstruieren etwa wie in Figur 4 am Dreieck ABC die Gerade $CD'A'$ beliebig, dann $D'D // A'A$ und zuletzt $D'E // A'B$. — Ein anderer Satz lautet: »Mehrere Geraden, welche zwei Parallelen so schneiden, dass die homologen Abschnitte einander proportional sind, schneiden sich in dem nämlichen Punkte«. Die Voraussetzung kann hier ebenfalls durch Benutzung zweier willkürlichen Masseinheiten konstruiert werden. Einen andern Weg zeigt Figur 5: Auf den Parallelen L und L' wählt man bezüglich die Punkte A, B, C und A', B' beliebig, und zieht CA', ferner $BD // AA'$ und $CC' // DB'$. Ganz verschieden davon ist Figur 6, in welcher eine Hülfspunktreihe α, β, γ der Geraden λ aus zwei verschiedenen Punkten S und S' bezüglich auf die zu λ parallelen Geraden L und L' projiciert ist. Hierbei zeigt sich das merkwürdige und den Schüler sicher erfreuende, wenn auch einstweilen von ihm noch unbegriffene Ergebnis, dass die drei Strah-

lenmittelpunkte auf einer Geraden liegen. — Endlich sei noch der Lehrsatz erwähnt: »Wenn eine Ecktransversale im Dreieck die gegenüberliegende Seite nach dem Verhältnis der anstossenden teilt, so ist sie die Winkelhalbierende«. Die entsprechende Figur erhält man, indem man entweder (Fig. 7) auf AC eine Strecke $CE=CB$ abschneidet und $CD//EB$ zieht, oder (Fig. 8) durch B zu CA eine Parallele $BF=BC$ legt und C mit F verbindet. So erhält man nicht nur gerade die für den Beweis erforderlichen Figuren, es steckt sogar die innere und äussere Teilung einer gegebenen Strecke nach gegebenem Verhältnis darin.

8. Die Umkehrung der Lehrsätze. Zum Schlusse dieses Kapitels soll uns die Frage beschäftigen: Wie wird ein Lehrsatz umgekehrt? Ihre Beantwortung ist nach so vielen in den vorigen Paragraphen betrachteten Beispielen um so mehr am Platze, da sie im engsten Zusammenhang mit Voraussetzung und Behauptung steht. Schon der Schüler fühlt dies, wenn er auch zuerst die nur in den seltensten Fällen richtige Antwort giebt: Man macht die Voraussetzung zur Behauptung und die Behauptung zur Voraussetzung. Das Verfahren ist vielmehr folgendes: Man übersetzt zunächst den Lehrsatz in die Zeichensprache der Mathematik, d. h. man stellt sämtliche Punkte der Voraussetzung und Behauptung auf und vertauscht dann jedesmal einen Punkt der Voraussetzung mit einem Punkt der Behauptung; die neue Voraussetzung und Behauptung wird zum Schluss wieder in die Wortsprache übertragen. Es sei (1) die Voraussetzung und Behauptung eines bekannten Satzes, so sind (2), (3) und (4) Umkehrungen desselben.

$$\begin{array}{cccc}
(1) & (2) & (3) & (4)\\
CA=CB & CA=CB & CA=CB & FA=FB\\
\sphericalangle ACF=\sphericalangle BCF & FA=FB & CF\perp AB & CF\perp AB\\
\hline
FA=FB & \sphericalangle ACF=\sphericalangle BCF & \sphericalangle ACF=\sphericalangle BCF & CA=CB\\
CF\perp AB & CF\perp AB & FA=FB & \sphericalangle ACF=\sphericalangle BCF
\end{array}$$

Zuweilen, wie auch hier, ist in der Voraussetzung noch ein versteckter Punkt vorhanden. In der Angabe $\sphericalangle ACF=\sphericalangle BCF$ verbirgt sich nämlich die Bedingung, dass F ein Punkt der Grundlinie ist. Schreiben wir demnach (1) wie folgt (Fig. 14), so erhalten wir noch die Umkehrung (5).

$$\begin{array}{c}
(1)\\
CA=CB\\
\sphericalangle ACX=\sphericalangle BCX\\
CXF\ (F \text{ auf } AB) \text{ eine Grade}\\
\hline
FA=FB\\
XF\perp AB
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
(5)\\
CA=CB\\
FA=FB\\
FX\perp AB\\
\hline
CXF \text{ eine Gerade (d. h. } FX \text{ geht durch } C)\\
\sphericalangle ACX=\sphericalangle BCX
\end{array}$$

Diese Zusammenstellung soll nur zeigen, dass die Umkehrungen sich auch bei scheinbarer Abweichung von der aufgestellten Regel im allgemeinen dennoch auf diese Art bilden lassen. Anderseits erhält man zuweilen einzelne Gruppen, welche unbrauchbar sind oder zur Gültigkeit noch eines Zusatzes bedürfen. Dies zeigt deutlich folgende vollständige Gruppenreihe, worin jeder Kongruenzsatz als Umkehrung eines einzigen unter ihnen erscheint.

$$\begin{array}{cccccc}
(1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6)\\
BC=B'C' & BC=B'C' & BC=B'C' & BC=B'C' & BC=B'C' & \sphericalangle A=\sphericalangle A'\\
CA=C'A' & \sphericalangle B=\sphericalangle B' & \sphericalangle B=\sphericalangle B' & CA=C'A' & CA=C'A' & \sphericalangle B=\sphericalangle B'\\
\sphericalangle C=\sphericalangle C' & \sphericalangle C=\sphericalangle C' & \sphericalangle A=\sphericalangle A' & AB=A'B' & \sphericalangle A=\sphericalangle A' & \sphericalangle C=\sphericalangle C'\\
\hline
\sphericalangle A=\sphericalangle A' & \sphericalangle A=\sphericalangle A' & \sphericalangle C=\sphericalangle C' & \sphericalangle A=\sphericalangle A' & \sphericalangle C=\sphericalangle C' & BC=B'C'\\
\sphericalangle B=\sphericalangle B' & CA=C'A' & CA=C'A' & \sphericalangle B=\sphericalangle B' & \sphericalangle B=\sphericalangle B' & CA=C'A'\\
AB=A'B' & AB=A'B' & AB=A'B' & \sphericalangle C=\sphericalangle C' & AB=A'B' & AB=A'B'
\end{array}$$

Hier ist die Gruppe (6) unbrauchbar, weil die drei Punkte der Voraussetzung nicht von einander unabhängig sind; die Gruppe (5) erheischt den Zusatz, dass $BC > CA$ und demnach $B'C' > C'A'$, oder allgemeiner, dass die Winkel B und B' gleichartig (d. h. beide spitze oder rechte oder stumpfe Winkel) sind. Trotz dieser kleinen Mängel weist die angegebene Regel auf eine reichhaltige Fundgrube von Lehrsätzen hin.

2. Kapitel.

Fortsetzung. Beweisen.

9. Wir stehen noch immer beim Lehrsatz. Um damit zu Ende zu kommen, wollen wir in diesem Kapitel noch das Beweisen aufs Korn nehmen. Beruht doch fast das ganze mathematische Können auf der Kunst des Beweisens, d. h. in erweitertem Sinne auf der Fähigkeit und Gewandtheit aus gegebenen Eigenschaften einer Figur — wir beschränken uns hier auf die Geometrie — neue abzuleiten. Daher ist die Pflege des Beweises eine Hauptaufgabe des Lehrers. Der Schüler muss die Beweise völlig begreifen, leicht behalten und mit Sicherheit zu wiederholen bezw. in ähnlichen Fällen mit Verständnis nachzuahmen im Stande sein.

10. Warum? Dieses Wörtchen soll dem Lehrer während der Beweisführung beständig auf der Zunge schweben. Ich denke hierbei zuerst an etwaige Hülfskonstruktionen. Für jede Linie ist ihre natürliche Berechtigung nachzuweisen; dann prägt sie sich auch besser dem Gedächtnisse ein. Warum zieht man z. B., um zu zeigen, dass im $\triangle\, ABC$ der Aussenwinkel $\sphericalangle CAD = \sphericalangle B + \sphericalangle C$, die Gerade $AE \| BC$? Weil eine Grösse, welche gleich der Summe zweier anderen ist, sich in zwei den letztern bezüglich gleiche Theile zerlegen lassen muss — ein Grundsatz, der auch anderweitig Verwendung finden kann. Die Begründung findet häufig eine Stütze in der Konstruktion der Voraussetzung (vergl. § 7 mit Figg. 7 und 8). Auch das Wie der Hülfskonstruktionen ist nicht gleichgültig; denn nur dann treten die neu konstruierten Teile mit den alten in einen für die Beweisführung günstigen Zusammenhang, wenn die Konstruktion in natürlicher Weise der Figur angepasst ist. Das einfachste Beispiel hierzu ist wohl die Konstruktion der Summe oder Differenz zweier Dreiecksseiten AC und CB: man wird BC nicht von A aus, sondern von C aus abtragen (Fig. 10).

Von mindestens ebenso grosser Wichtigkeit ist das Warum während der eigentlichen Beweisführung. Jede Angabe, jede Schlussfolgerung muss in der Regel durch einen entsprechenden Hinweis, sei es auf die Voraussetzung oder auf bereits Bewiesenes, sei es auf einen vorausgegangenen Satz, begründet werden. Unerlässlich ist dies beim Anfangsunterricht; man deckt dabei manchmal die schwersten Fehler auf. Ist nämlich beispielsweise durch Kongruenz zweier Dreiecke die Gleichheit zweier Winkel bewiesen, die zugleich Nebenwinkel und demzufolge Rechte sind, und fragt man, um die Festigkeit des Schülers zu prüfen: Warum sind also die Winkel einander gleich? so erhält man nicht selten die Antwort: als Rechte (oder gar als Nebenwinkel!) Eine solche Verwechselung von Grund und Folge kommt da, wo Umkehrungen von Lehrsätzen im Spiele sind, mehrfach vor.

11. Direkter Beweis. Frühzeitig hat der Lehrer den Schüler zur Beweisführung dadurch anzuleiten, dass er ihn den noch unbekannten Beweis einer Behauptung selbstthätig auffinden lässt. Dies kann beim direkten Beweis in dreifacher Form geschehen: durch die rechtläufige oder fortschreitende, durch die rückläufige oder rückschreitende und durch die gemischte Beweisfolge. Die erste Art geht von der Voraussetzung aus und gelangt durch eine ununterbrochene Schlussreihe bis zur Behauptung. Die zweite Art beginnt mit der Behauptung und sucht von dort den Weg bis zur Voraussetzung auf, am besten durch die sich wiederholende Frage: Welche Bedingung A muss erfüllt sein, damit die Behauptung sich unmittelbar ergiebt? welche weitere Bedingung B, damit A stattfindet? u. s. w. Der gewöhnlichste Weg zur Auffindung eines Beweises ist aber jedenfalls der gemischte. Man verfolgt anfangs den von der Voraussetzung angezeigten Weg bis zu einem Punkte, von wo man im Augenblicke

nicht weiterzukommen weiss, und bahnt sich dann, indem man sich vorher darauf besinnt, was man eigentlich beweisen wollte, von der Behauptung ausgehend den Weg bis zu jenem Punkte rückwärts. Oder man beginnt rückschreitend mit der Behauptung und fragt sich unterwegs, was vorausgesetzt war. Derselbe Gedankengang führt zur Auffindung etwaiger Hülfslinien und deren zweckentsprechender Konstruktion. Der so gefundene Beweis lässt sich leicht in die rechtläufige Form bringen.

Übrigens bietet sich die Gelegenheit, gewissermassen unmerklich eine Anleitung zur Beweisführung zu geben, alle Augenblicke dar. Denn erfahrungsmässig verliert der Schüler nur zu oft die Voraussetzung oder die Behauptung oder gar beide aus den Augen, und die Fragen, mit denen der Lehrer einzugreifen hat, ergeben sich dann von selbst. Auch dem Lehrer passiert es zuweilen, dass ein — an sich möglicher — Beweis nicht gelingen will; meistens ist dann die Voraussetzung nicht genügend ausgenutzt.

12. Übungssätze. Zur Übung im direkten Beweise und in der Anwendung der durchgenommenen Lehrsätze giebt es eine Menge von Übungssätzen; manches Lehrbuch und jede Aufgabensammlung bietet Stoff; durch geeignete Umkehrung lässt sich derselbe mannigfach wechseln. Es wird sich jedoch empfehlen, die Wahl auch mit einem Ausblick auf spätere Verwendbarkeit zu treffen. Nützlich ist es daher, einen Teil der Übungssätze, nötigenfalls in veränderter Form, dem festen Grundstock des nachfolgenden Unterrichtspensums zu entnehmen (z. B. zur Einübung der Kongruenzsätze einzelne Lehrsätze vom Parallelogramm); die Schüler freuen sich dann später in den vermeintlich neuen Sätzen alte Bekannte wiederzufinden. Eine besondere Art von Aufgaben besteht darin, Figuren mit vorgeschriebenen Eigenschaften zeichnen, aus den gegebenen Eigenschaften neue ableiten und die gewonnenen Ergebnisse in Form von Lehrsätzen aussprechen zu lassen. Vgl. § *22*. Alle diese Dinge geben mir Veranlassung einen Punkt ins Auge zu fassen, der mir nicht genug beachtet zu werden scheint.

13. Die homologe Reihenfolge. Eine grosse Zahl von Beweisen wird auf Kongruenz- und Ähnlichkeitssätze und deren unmittelbare Folgerungen zurückgeführt. Hierbei ist es meines Erachtens von grosser Wichtigkeit, in der Benennung der einander entsprechenden Stücke stets bis ins einzelne den Grundsatz der homologen Reihenfolge durchzuführen. Zur Erläuterung mögen die nachstehenden Beispiele dienen. In (*a*) ist die Figur 1 und die daselbst konstruierte Voraussetzung zu Grunde gelegt; in (*b*) handelt es sich um ein gleichschenkeliges Dreieck, worin $CA=CB$ und ausserdem $CF\perp AB$, in (*c*) endlich ist im $\triangle ABC$ $\sphericalangle ACB=R$ und $CD\perp AB$. Dann ist in den Dreiecken

	(*a*)	(*b*)	(*c*)
	ABC und CDA:	ACF und BCF:	ABC und ACD:
1)	$\underline{A}\underline{C}=\underline{C}\underline{A}$	$\underline{CF}=\underline{CF}$	$\sphericalangle \underline{CAB}=\sphericalangle \underline{DAC}$
2)	$AB=CD$	$CA=CB$	$\sphericalangle ACB=\sphericalangle ADC$
3)	$\sphericalangle CAB=\sphericalangle ACD$	$\sphericalangle AFC=\sphericalangle BFC$	$(\sphericalangle ABC=\sphericalangle ACD)$
folglich	$\triangle ABC\cong\triangle CDA$	$\triangle ACF\cong\triangle BCF$	$\triangle ABC\sim\triangle ACD$
also	$BC=DA$	$AF=BF$	$AB:AC=AC:AD$
	$\sphericalangle ABC=\sphericalangle CDA$	$\sphericalangle ACF=\sphericalangle BCF$	$AB:AC=BC:CD$
	$\sphericalangle ACB=\sphericalangle CAD$	$\sphericalangle CAF=\sphericalangle CBF$	(oder $AB:BC=AC:CD$)

Man beachte, dass überall auch die identischen Stücke (oben unterstrichen) in homolog geordneter Benennung erscheinen. Es wird niemand leugnen können, dass auf diese Weise ein tieferes Eindringen in die Beziehungen der Figuren erzielt wird, zumal wenn man hierbei die sich fast aufdrängende Frage stellt, welche Drehung oder Verschiebung wohl erforderlich sei, um die Figuren wirklich zur Deckung (oder in ähnliche Lage) zu bringen. Man erkennt aber leicht noch einen weiteren Vorteil. Der Zwang der homologen Reihenfolge nötigt nämlich den Schüler, die homologen Stücke, deren Gleichheit oder Proportionalität er beweisen soll, auch mit dem Bewusstsein, dass sie homolog sind, auszuwählen. Der Schüler ist nämlich

geneigt, sich beim Schlusssatz eines Beweises mehr von seinem Gedächtnisse, weil er ihn vom Lehrsatz oder von der Behauptung her auswendig weiss, als von vernünftiger Überlegung leiten zu lassen; so öfters bei dem in (c) angedeuteten Lehrsatze. Überdies ergeben sich bei schriftlicher Bearbeitung eines Beweises die zu ziehenden Folgerungen ohne weitere Betrachtung der Figur aus der Benennung selbst. In (c) entspricht z. B. der Seite AB des ersten Dreiecks (1. und 2. Buchstabe, bzw. Ecke) die Seite AC des zweiten (ebenfalls 1. und 2. Buchstabe). Man braucht daher erst beim Schlusse wieder einen Blick auf die Figur zu werfen, um zu sehen, wie die abgeleiteten Beziehungen in Worte zu kleiden sind.

14. Indirekter Beweis. Beim indirekten Beweise, welcher der Natur der Sache nach bei der Umkehrung von Lehrsätzen seine Stelle findet, ohne dass jede Umkehrung indirekt bewiesen werden müsste, kommt es wesentlich darauf an, dass der Schüler die ausser der Behauptung sonst noch möglichen Fälle sämtlich und in aller Schärfe bezeichnet. Nur das Letztere soll uns hier beschäftigen und zwar an einem Beispiele. Ich wähle hierzu die Umkehrung des Lehrsatzes vom Tangentenviereck. Der Schüler beginnt den Beweis etwa so: Gesetzt, der die Seiten AB, BC und CD berührende Kreis berührte die vierte Seite DA nicht, so müsste er eine andere Gerade berühren. Dies bringt uns aber nicht weiter, weil es auch dann zutrifft, wenn die Behauptung richtig wäre. Es muss vielmehr heissen: . . . so könnte ich, da AB schon eine Tangente ist und demnach A nicht innerhalb des Kreises liegt, von A aus die zweite Tangente noch ziehen; sie sei AD'. Nun aber sind, da man sich nicht auf den Augenschein stützen darf, der oben erwähnte Kreis auch nicht einmal wirklich gezogen zu werden braucht, drei Fälle zu unterscheiden; der Berührungspunkt der Tangente AB kann nämlich, falls wie angenommen AD keine Tangente ist, entweder auf BA selbst oder auf der Verlängerung liegen oder auch mit A zusammenfallen. Die Behandlung dieser drei Fälle ist nicht ganz ohne Schwierigkeit, obwohl die einzelnen Beweise sich höchstens in den Vorzeichen unterscheiden. Dieselben nehmen, wovon der Leser sich selbst überzeugen möge, mit Beschränkung auf das Notwendigste eine der beiden Formen an:

	(a)	(b)
Es wäre	$AB+CD'=BC+D'A$	$AB-CD'=BC-D'A$
es ist aber	$AB+CD=BC+DA$	$AB+CD=BC+DA$
mithin wäre	$CD-CD'=DA-D'A$	$CD+CD'=DA+D'A$, was unmöglich ist.

Wenn nicht schon früher (vergl. § 6 und Fig. 3), so wird man durch diese Betrachtung darauf gestossen, den Hauptsatz vom gewöhnlichen Tangentenviereck — mit den erforderlichen unwesentlichen Änderungen — auch auf die beiden anderen im Vierseit enthaltenen Vierecksformen auszudehnen; in dem Vierseit $ABCD$, worin AB und CD einander in E, BC und AD einander in F schneiden, sind nämlich ausser $ABCD$ die Vierecke $AECF$ und $BFDE$ enthalten. Doch kehren wir zurück zu unserem Beweise. Die erwähnte Schwierigkeit und Umständlichkeit kann man umgehen. Sind K und L bezüglich die Berührungspunkte von AB und BC, so liegt notwendig L auf BC selbst, es ist daher $BL<BC$. Und da $BK=BL$, also $BK<BC$ ist, so liegt K dann unter allen Umständen auf BA selbst, wenn $BA>BC$ ist. Diese Bedingung kann durch geeignete Auswahl der Seiten stets erfüllt werden, und dadurch ist der Beweis auf den ersten Fall beschränkt. Im übrigen habe ich keineswegs, wie es fast scheinen könnte, eine besondere Vorliebe für Tangentenvierecke; aber die auf den ersten Blick vielleicht etwas auffallende Thatsache, dass sich der für den ersten Fall berechnete Beweis in allen wesentlichen Punkten wörtlich auf die anderen anscheinend davon recht verschiedenen Fälle übertragen lässt, steht nicht vereinzelt da. Das soll im Folgenden beleuchtet werden.

15. Bewegung der Figuren. Innere Einheit bei äusserer Mannigfaltigkeit in Lehrsätzen und Figuren. Wenn wir Leben in die Figuren bringen, indem wir einen Bestandteil derselben in Bewegung setzen, so lassen sich dadurch scheinbar verschiedene Beziehungen unter einen Gesichtspunkt bringen und als verschiedene Erscheinungsformen derselben

Wahrheit erkennen. Dreht man in einem Dreieck ABC die Seite AC um den Punkt A, so dass der andere Endpunkt C, auf BC fortgleitend, in unendliche Ferne rückt, so sieht man, dass die Sätze von den Winkeln eines Dreiecks und den Winkeln an zwei von einer dritten Geraden geschnittenen Parallelen nicht wesentlich von einander verschieden sind; die Vorstellung von zwei Parallelen als zwei in unendlicher Ferne sich schneidenden Geraden wird schon durch die noch lange nicht unendlichen Verhältnisse unserer Erde begünstigt: irgend zwei senkrechte Kanten eines Gebäudes erscheinen uns parallel, obwohl sie, mögen sie nun nach dem Senkblei oder nach der Libelle gerichtet sein, in noch nicht 1000 Meilen Entfernung einander schneiden, wobei wir davon absehen, dass sie möglicherweise windschief sind. — Eine Sekante geht durch Drehung um einen ihrer äusseren Punkte allmählich in eine Tangente über; eine Tangente ist also nichts anders als eine Sekante, deren beide Schnittpunkte in einen einzigen Punkt zusammenfallen, oder deren innerer Abschnitt (die Sehne) gleich Null ist. Bei dieser Auffassung erkennt man leicht, dass gewisse Sätze über die Tangente nur besondere Fälle von Sätzen über die Sehne oder über das gleichschenklige Dreieck darstellen, ja als deren Folge betrachtet werden können. — Unter einem Peripheriewinkel versteht man jeden Winkel, dessen Scheitelpunkt auf der Peripherie eines Kreises liegt. Wenn wir daher (Fig. 9) den Scheitel C des Winkels XCY auf dem Kreisumfang herumführen, dergestalt dass seine Schenkel CX und CY stets bezw. durch die Punkte A und B der Peripherie gehen, so erhalten wir die Lagen XCY, $X_1C_1Y_1$, $X_2C_2Y_2$, und wir müssen folgerichtig allen diesen Winkeln denselben Bogen AC_2B zuweisen. Dann passt auch auf die Lagen $X_1C_1Y_1$ und $X_2C_2Y_2$ der Satz: »Ein Peripheriewinkel ist halb so gross wie der auf dem zugehörigen Bogen stehende Centriwinkel«, und wenn wir uns die kleine Mühe geben wollen, so werden wir finden, dass er für diese Winkel genau ebenso bewiesen werden kann wie für XCY. Es ist nämlich, wenn wir uns die Durchmesser CD, C_1D_1, C_2D_2 gezogen denken, wiederum mit *B*eschränkung auf das Notwendigste, für alle drei Fälle übereinstimmend

$$\begin{array}{ccc} \sphericalangle XCD = \tfrac{1}{2}\sphericalangle AOD & \sphericalangle X_1C_1D_1 = \tfrac{1}{2}\sphericalangle AOD_1 & \sphericalangle X_2C_2D_2 = \tfrac{1}{2}\sphericalangle AOD_2 \\ \sphericalangle DCY = \tfrac{1}{2}\sphericalangle DOB & \sphericalangle D_1C_1Y_1 = \tfrac{1}{2}\sphericalangle D_1OB & \sphericalangle D_2C_2Y_2 = \tfrac{1}{2}\sphericalangle D_2OB \\ \hline \sphericalangle XCY = \tfrac{1}{2}\sphericalangle AOB & \sphericalangle X_1C_1Y_1 = \tfrac{1}{2}\sphericalangle AOB & \sphericalangle X_2C_2Y_2 = \tfrac{1}{2}\sphericalangle AOB \end{array}$$

Mithin $\sphericalangle XCY = \sphericalangle X_1C_1Y_1 = \sphericalangle X_2C_2Y_2$. Wenn man aber auch jedenfalls zunächst, der Fassungskraft des Schülers entgegenkommend, die Einzelerscheinung ins Auge fasst und als solche beweist, so wird es dennoch angemessen sein, nachher durch Betrachtungen wie oben dem Schüler zum klaren Bewusstsein zu bringen, dass die Sätze: *a*) »Peripheriewinkel auf demselben Bogen innerhalb desselben Abschnitts sind einander gleich«, *b*) »Der Sehnentangentenwinkel ist gleich dem Peripheriewinkel im entgegengesetzten Abschnitt«, *c*) »Der Aussenwinkel eines Sehnenvierecks ist gleich dem gegenüberliegenden inneren Winkel« in dem einen Satz enthalten sind: »Alle Peripheriewinkel auf demselben Bogen sind einander gleich.«

16. Die sogenannten Potenzsätze können in die gemeinschaftliche Form gebracht werden: »Wenn zwei Sekanten einander schneiden, so sind die Produkte aus ihren Abschnitten (gerechnet vom Schnittpunkt bis zur Peripherie) einander gleich«. Der für einen innern Schnittpunkt geführte Beweis lässt sich ohne weiteres auf die anderen Fälle übertragen, wenn die zugehörigen Figuren mit den gleichnamigen Bezeichnungen versehen sind; die Übereinstimmung wird auch in der Begründung der einzelnen Beweispunkte eine vollständige, wenn wir den Begriff der Peripheriewinkel auf demselben Bogen in seiner eben ausgesprochenen Erweiterung gelten lassen. — Ich habe oben von Abschnitten gesprochen; dies bringt mich auf einen andern Punkt. Fällt man im Dreieck ABC von der Spitze C auf die Grundlinie die Senkrechte CF, so wird dadurch die Grundlinie, wenn die anliegenden Winkel spitze sind, in zwei Abschnitte geteilt, AF und BF, und wenn wir von A nach B fortschreiten, so ist der zurückgelegte Weg $AF+FB$. Ist aber der Winkel B ein stumpfer, so kann man nicht mehr im gewöhnlichen Sinne sagen: AB ist in zwei Abschnitte geteilt. Nimmt man jedoch auch in diesem Falle seinen Weg von A nach B über F, so besteht dieser Weg ebenfalls aus zwei

Teilen, AF und FB, nur dass jetzt $AB=AF-BF$ ist. In diesem Sinne ist es gerechtfertigt zu sagen: AB ist sowohl in dem ersten wie in dem zweiten Falle in zwei Abschnitte geteilt, im ersten Falle innerlich, im zweiten Falle äusserlich. Zieht man im Dreieck ABC $DE//AB$, so pflegt man, wenn D und E auf CA und CB selbst liegen, von ganzen Seiten, oberen Abschnitten und unteren Abschnitten zu sprechen; diese Ausdrucksweise kann aber auch auf diejenigen Figuren übertragen werden, in welchen DE jene Seiten auf deren Verlängerung sei es oberhalb der Spitze oder unterhalb der Grundlinie, trifft, und dann ist auch jetzt CA eine ganze Seite, CD ihr oberer, DA ihr unterer Abschnitt, überall ist AB die Grundlinie und DE die Parallele. Der Beweis der in Betracht kommenden Lehrsätze ist für alle drei Fälle der nämliche. Hiernach bedarf es dann z. B. in Fig. 8 *) zum Beweise der Proportion $AD:DB=AC:BF$ nicht eines Ähnlichkeitssatzes, sondern des Satzes: »Seite (des $\triangle ACD$) zu ihrem oberen Abschnitte, wie die Grundlinie zur Parallelen«, welcher Satz auch zur Verwendung kommt bei der Proportion $AD':D'B=AC:BF'$ (im $\triangle ACD'$).

17. Die vorstehende Darlegung zeigt, dass die für einen Einzelfall angestellten Erörterungen, sofort auf alle anderen gleichartigen, wenn auch äusserlich verschiedenen Fälle bezogen werden können, wenn man nur an den bezüglichen Figuren die genau entsprechenden Bezeichnungen anbringt; für den Fall, dass die verwandten Beziehungen an derselben Figur zur Anschauung kommen, werden die gleichartigen und demnach gleichnamigen Punkte durch Striche (X') oder Marken (X_1) von einander unterschieden. Übrigens ist die übereinstimmende Bezeichnung, der ich hier das Wort rede, selbstverständlich keine wesentliche und unumgängliche Forderung, wohl aber ein die Übertragung der Erörterungen und das volle Verständnis ungemein erleichterndes Hülfsmittel.

3. Kapitel.

Der Citatenschatz.

18. Oben habe ich gesagt, dass auf der Kunst des Beweisens das mathematische Können beruht. Jeder Beweis aber bedarf selbst wieder zu seiner Stütze einer Summe von Wahrheiten, von deren sicherer Beherrschung das Gelingen des Beweises abhängt. Diese Summe von Wahrheiten, welche dem Mathematiker zur Verfügung stehen muss, nenne ich seinen Citatenschatz. Im weitesten Sinne gehört hierzu das gesamte bereits erworbene mathematische Wissen. Naturgemäss verwischen sich jedoch im Gedächtnisse manche Dinge und zwar um so leichter, je weniger sie zur Anwendung kommen. Das hat aber nichts zu bedeuten, wenn man nur im stande ist dieselben bei Bedarf wieder aufzufrischen. Und dazu genügt die feste Aneignung gewisser zu Ausgangspunkten geeigneter Hauptwahrheiten.

19. Auswahl und Gruppierung der Lehrsätze. Zunächst ist die Zahl der den festen Grundstock bildenden Lehrsätze möglichst knapp zu halten. Es ist nicht nötig, dass jede wichtige Eigenschaft einer Figur dem Schüler in Form eines Lehrsatzes stets gegenwärtig ist; es wird hinreichen, wenn er durch gelegentlich wiederholte Nachfragen des Lehrers daran gewöhnt ist, eine solche Eigenschaft aus einem bekannten Satze immer wieder herzuleiten. Als ein weiteres Erfordernis betrachte ich es, dem Schüler von Anfang an durch passende Anordnung der Sätze eine leicht zu behaltende Übersicht über sein Wissen zu verschaffen. Mehrere Lehrbücher reissen, veranlasst durch die Vorliebe für gewisse Beweisarten, zusammengehörige Sätze (z. B. die Kongruenzsätze, die Sätze von den merkwürdigen Punkten eines Dreiecks) auseinander. Ich finde dies wenig zweckmässig. Wenn man ihnen aber auch hierin recht geben wollte, so darf man doch nicht unterlassen, die Sätze an geeigneter Stelle in natürliche Gruppen zu ordnen. Endlich soll der Schüler lernen, im Bedarfsfalle schnell die passenden Sätze aus seinem Wissensschatz herauszuholen. Dazu eignet sich eine gelegentliche — manchmal künstliche — Zusammenstellung nach gewissen Einzelmerkmalen. Bei-

*) Hier ist, im Gegensatz zu dem ursprünglichen Zweck der Figur, vorausgesetzt, dass CD und CD' die Winkel bei C halbieren (und $BF//CA$).

spiele: Welche Sätze können in Betracht kommen, wenn der Parallelismus zweier Geraden zu beweisen ist? Welche Sätze handeln von der Halbierung einer Strecke? von der Gleichheit zweier Strecken? oder Winkel?

20. Auswahl der Beweise. Auch die Beweise der Hauptlehrsätze müssen wenigstens in ihren Grundzügen im Gedächtnisse haften; denn sie sind die Vorbilder, nach welchen der Schüler sich zu richten hat. Dies wird bewirkt teils durch das Beweisverfahren, worüber wir im vorigen Kapitel gesprochen haben, teils durch eine zweckentsprechende Auswahl unter den verschiedenen möglichen Beweisen. Diejenigen Beweise, bei welchen die Verstandesthätigkeit durch die Anschauung und die Anschaulichkeit unterstützt wird, sind den mehr abstrakten entschieden vorzuziehen. Des weiteren wird eine Entlastung des Gedächtnisses dadurch erzielt, dass verwandte Sätze auch in verwandter Weise behandelt werden. So stelle ich den Satz: »Der grösseren Seite eines Dreiecks liegt der grössere Winkel gegenüber« mit dem Fundamentalsatz vom gleichschenkligen Dreieck zusammen und gebe ihm die entsprechende Form: »Im ungleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel ungleich, und zwar liegt . . . .«. Den Beweis lasse ich in beiden Fällen durch Halbierung des Winkels an der Spitze und Umklappen des einen Dreiecks auf das andere führen, wodurch bis zu einem gewissen Punkte wörtliche Übereinstimmung erreicht und auch weitere Vergleiche nahe gelegt werden. Die beiden Sätze: »Die Summe zweier Dreiecksseiten ist grösser, ihre Differenz kleiner als die dritte Seite« beweise ich — ein Beispiel zu §§ 15 ff. — an der Figur 10; denn den zweiten Satz als Folge des ersten zu betrachten ist, weil zu algebraisch, bei weitem nicht so anschaulich. Jene Figur dient ausserdem, und dies spricht auch für ihre Anwendung, späteren Untersuchungen zur Grundlage. Es sei ferner noch auf den völlig gleichen Gedankengang in den Beweisen der Ähnlichkeitssätze hingewiesen, welcher Umstand den Schülern zum Bewusstsein gebracht werden muss. Der Zusammenziehung und gleichzeitigen Behandlung verwandter Sätze ist übrigens schon in den Paragraphen 15 bis 17 gedacht.

21. Geometrische Örter. Der Wert der geometrischen Örter ist unbestritten; doch ist auch hier eine weise Beschränkung geboten. Wichtiger als die Summe des diesbezüglichen Wissens scheint mir die klare Vorstellung zu sein. Zu dem Ende erkläre ich jeden geometrischen Ort als den Weg eines Punktes, welcher während seiner Bewegung gewissen vorgeschriebenen Bedingungen genügt. Wenn die Gerade und der Kreis zum ersten Male als geometrische Örter auftreten, entstehen deren Bilder sogar wirklich auf jene Weise: die Gerade ist der Weg der Schreibstiftspitze, welche sich längs des Lineals bewegt, der Kreis ist der Weg der einen Zirkelspitze, während die andere ruht, unter der Bedingung natürlich, dass der Abstand der Spitzen derselbe bleibt. Und diese Betrachtungsweise wird bei der Aufsuchung eines neuen geometrischen Ortes beibehalten, indem man nicht fragt: Auf was für einer Linie muss der Punkt liegen, damit . . . ? sondern: Welchen Weg wird er beschreiben, wenn er . . . ? Im Anschlusse hieran sei bemerkt, dass es zuweilen nicht unpassend ist, den Schüler einzelne Stellungen des Punktes zeichnen zu lassen und dadurch auf die richtige Fährte zu lenken. Ist so der geometrische Ort durch rückschreitende Schlussfolge gefunden, so ist es in der Regel leicht, für einen beliebigen (oder etwa für den durch den Ort gerade gesuchten und gefundenen) Punkt auch rechtläufig die Richtigkeit zu beweisen. Wird der geometrische Ort in Form eines Lehrsatzes sofort mit rechtläufiger Beweisführung behandelt, so muss streng genommen der Nachweis hinzutreten, dass jeder Punkt ausserhalb des Ortes die geforderte Bedingung nicht erfüllt. Dies ist bei rückschreitender Ermittelung desselben nicht so sehr erforderlich, da der Beweisgang den Gedanken einschliesst: Der gefundene Weg enthält alle möglichen Stellungen des betrachteten Punktes.

22. Hülfs- und Grundaufgaben. Wir haben im ersten Kapitel gesehen, wie die Hülfs- und Grundaufgaben schon frühzeitig fortwährend angewendet werden können. Sie sind, wie schon bemerkt, den Figuren anzupassen. Oft stösst man bei dem Schüler hierbei auf eine merkwürdige Ungeschicklichkeit. Der Schüler lernt, dass man, um durch einen Punkt zu einer Geraden eine Parallele zu legen, von dem ersteren eine beliebige Verbindungslinie nach der Geraden zu ziehen hat, und zieht später richtig eine solche Linie auch dann, wenn deren schon eine oder mehrere vorhanden sind. Ist auf irgend einer Strecke eine beliebige

Senkrechte von vorgeschriebener Grösse erforderlich, so konstruiert er ruhig eine beliebige Senkrechte, unbekümmert darum, dass er die etwa schon vorhandene Mittelsenkrechte benutzen kann. Um daher zu einer sachgemässen Verwertung der Aufgaben anzuleiten, wird es nicht schaden, ausser den Anwendungen bei der Konstruktion der Voraussetzung noch besondere Aufgaben zu stellen. Wie von selbst bietet sich hier der Stoff dar. Die drei Mittelsenkrechten auf den Seiten eines Dreiecks zu errichten, die drei Höhen zu konstruieren, durch die Mitte einer Dreiecksseite Parallelen zu den beiden anderen Seiten, durch die Ecken eines Dreiecks Parallelen zu den gegenüberliegenden Seiten, durch die Ecken eines Vierecks Parallelen zu den Diagonalen zu ziehen u. a., das sind Aufgaben, die man schon zu einer Zeit stellen kann, wo sie noch nicht als Voraussetzung eines Lehrsatzes auftreten. Nicht nur, dass man dabei auf eine einfache und möglichst gefällige Lösung achten kann (z. B. bei der Konstruktion zur erstgenannten Aufgabe ist der Schüler geneigt drei Paar Kreise zu ziehen, während im ganzen drei Kreise von gleichem Radius, der aber grösser sein muss als die Hälfte der grössten Seite, genügen): man hat Material zu selbständigen, oft auf Späteres vorbereitenden Untersuchungen. So kann man bei der vorletzten der oben angeführten Aufgaben die Frage nach den Eigenschaften der neuen Figur behandeln lassen und auf die gewonnenen Resultate eine andere Konstruktion zu der ursprünglichen Aufgabe gründen. Auch die Mittellinien und Höhen können bei dieser Figur in den Kreis der Betrachtungen gezogen werden. Das Gesagte ist z. T. in den Figuren 11 bis 13 dargestellt. Wenn man zum Zweck der Wiederholung der Sätze vom gleichschenkligen Dreieck die verschiedenen Voraussetzungen konstruieren lässt, so ergiebt sich, dass die vier vorkommenden Transversalen durch eine und dieselbe Konstruktion gefunden werden können (Fig. 14), wodurch die Einerleiheit (Identität) dieser Linien auch äusserlich ihre Bestätigung findet.

23. Figuren als Wegweiser. Der grösste Teil der Konstruktionsaufgaben verlangt den Aufbau von Dreiecken (oder Vielecken) aus gegebenen Stücken. Zur Sicherung des Erfolges ist daher dem Citatenschatz auch die Kenntnis gewisser Figuren einzuverleiben, welche die am häufigsten vorkommenden Beziehungen zwischen den einzelnen Stücken zur Anschauung bringen. Dahin gehören das Dreieck mit der Summe und Differenz zweier Seiten und der gegenüberliegenden Winkel, das Dreieck in seinen Beziehungen zum Umkreis, zum Inkreis und zu den Ankreisen u. a. Hier scheint mir auch der Ort zu sein, auf die gut verwertbare Thatsache hinzuweisen, dass allemal bei der Konstruktion der halben Summe zweier Strecken oder Winkel gleichzeitig die halbe Differenz derselben — und umgekehrt — auftritt. In den Figuren 15 ist $AM = \frac{1}{2}(AC \pm CB)$ gemacht und $MC = \frac{1}{2}(AC \mp CB)$ geworden, worin das obere Zeichen für Fig. 15a, das untere für Fig. 15b gilt. Auch beim Trapez erscheint fast gleichzeitig mit der halben Summe der Grundlinien deren halbe Differenz.

Die gedachten Figuren bilden zusammen mit allen übrigen im Laufe des Unterrichts konstruierten den Figurenschatz des Schülers.

24. Das Figurenheft. Dieser Schatz wird zweckmässig in einem besonderem Hefte, dem Figurenhefte, aufbewahrt. Ich verstehe darunter ein Heft, in welches der Schüler die als Voraussetzung oder als besondere Aufgabe anzufertigenden Figuren, auch diejenigen, auf deren Ausführung während der Unterrichtsstunde verzichtet wird, nach der Reihe ihres Vorkommens, mit dem Wortlaut des betr. Lehrsatzes oder der Aufgabe als Überschrift, in sorgfältiger und sauberer Ausführung zu Hause einzeichnet. Ein solches Heft kann zu einem vortrefflichen Nachschlagebuch werden; ein Blick auf eine selbstgefertigte Figur ist oft eine bessere Wiederholung als längeres Studium eines fremden Erzeugnisses.

25. Grundsätze der Überlegung. Auf die Gefahr hin, schon Gesagtes nochmals vorzubringen, kann ich nicht genug betonen, dass für die Lösung einer Aufgabe alles Wissen wertlos ist, wenn die Brücke zwischen dem Gegenstande und dem Wissen fehlt. Diese Brücke besteht in gewissen Grundsätzen der Überlegung, die vollständig aufzuzählen ich mich nicht anheischig machen möchte. Hierher Gehöriges ist in den Paragraphen 10, 11 und 19 angedeutet, u. a. die Frage nach den etwa verwertbaren Lehrsätzen. Durch Beantwortung dieser Frage gewinnen wir gewisse Einzelregeln: ist die Gleichheit zweier Strecken oder Winkel im Spiel, so können dieselben unter Umständen in kongruente Dreiecke gebracht werden;

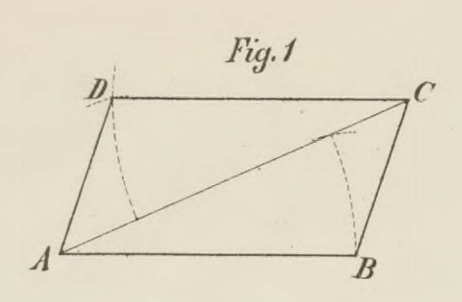
oder sie können als gegenüberliegende Teile eines Parallelogramms oder als Hälften einer einzigen Grösse auftreten u. dgl. mehr. Sollen zwei ihrer Grösse nach von einander unabhängige Strecken in engere Beziehung gesetzt werden, so ist oft eine Verlegung der einen Strecke erforderlich; in einigen Fällen geschieht dies durch Drehung, in andern, namentlich wenn dieselben nicht mit einem Endpunkte zusammenstossen, durch Parallelen. Es ist natürlich, dass mit dem fortschreitenden Unterricht der Umfang dieser Grundsätze sich erweitert, wie sich gleichzeitig ihr Inhalt mehr und mehr befestigt.

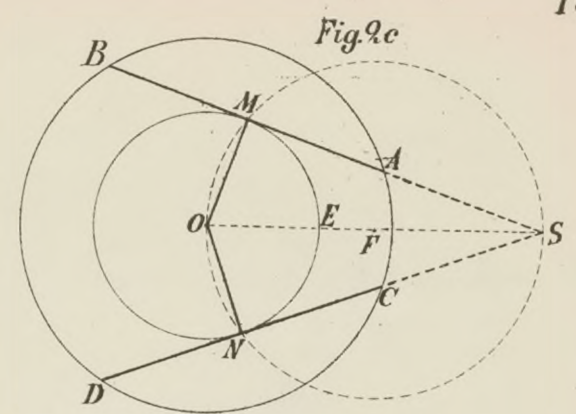
Im Besitze eines genügenden Wissens und vertraut mit den wichtigsten Überlegungs- und Arbeitsregeln, dürfen wir unverzagt und zuversichtlich an die Lösung besonderer Konstruktionsaufgaben herantreten.*)

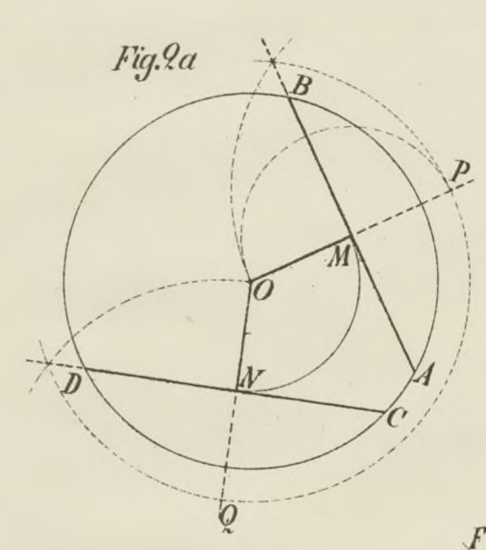
---

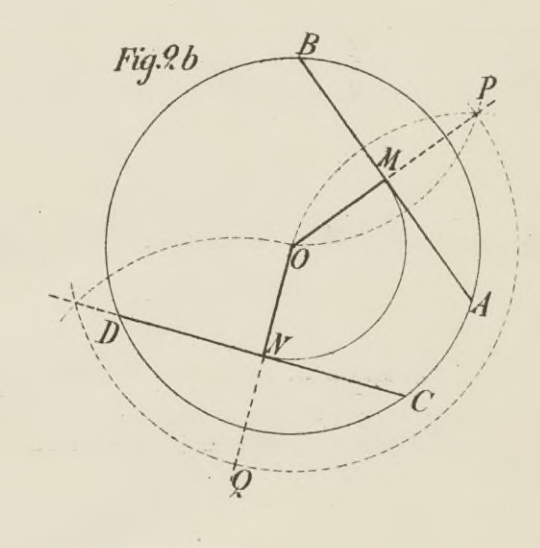
*) Die zweite Hälfte dieser Abhandlung musste, obwohl druckfertig, der Kosten wegen für das nächstjährige Programm zurückgestellt werden.

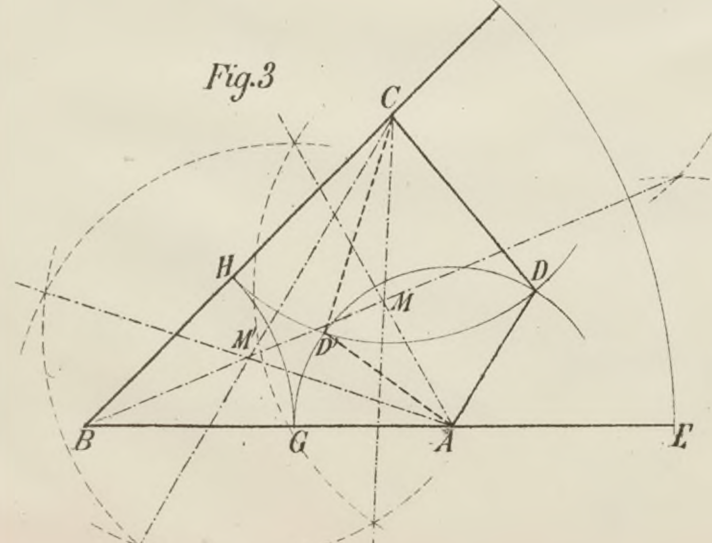
Taf. I

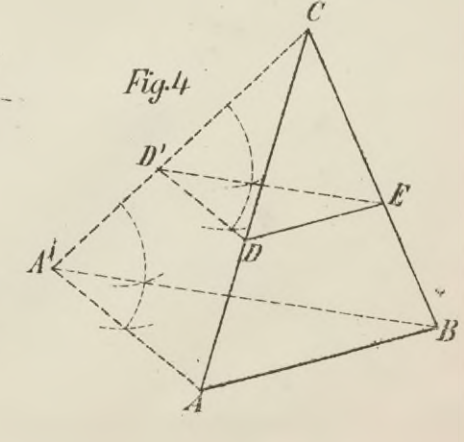

Fig. 1
D
C
A
B


Fig. 2c
B
M
A
O
E
F
S
C
N
D


Fig. 2a
B
P
M
O
D
N
A
C
Q


Fig. 2b
B
P
M
O
A
D
N
C
Q

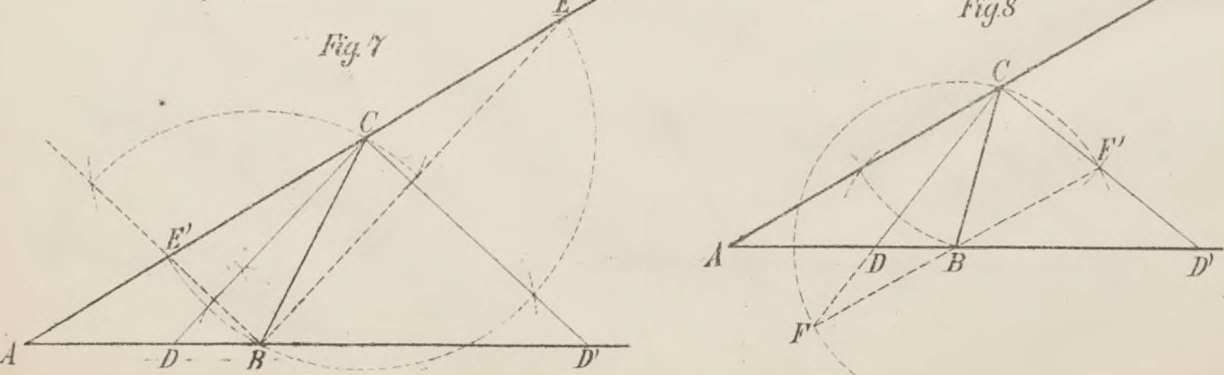

F
Fig. 3
C
H
D
M
M'
D'
B
G
A
E

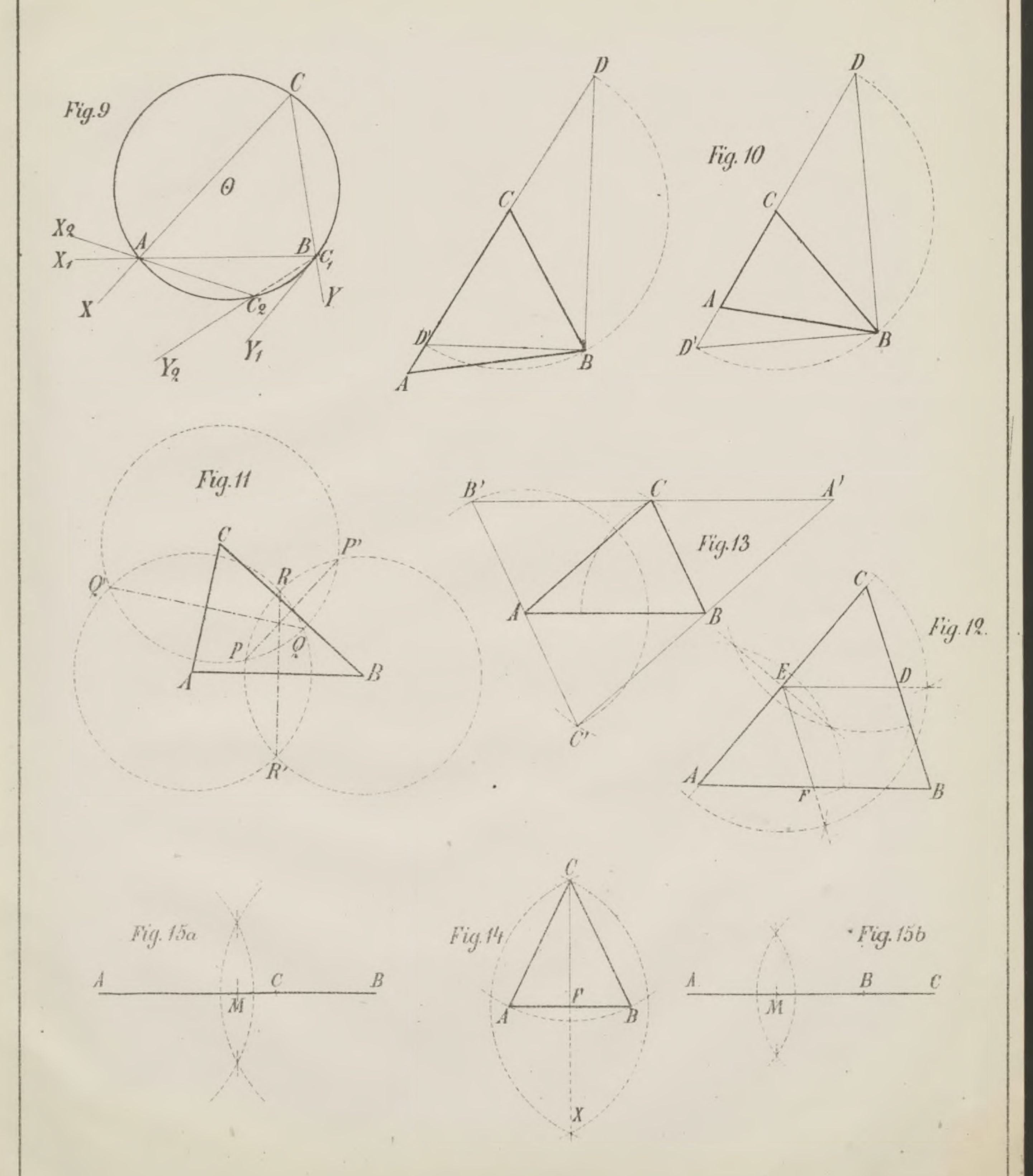

C
Fig. 4
D'
E
D
A'
B
A

Taf. II

Fig. 5

Fig. 6




Fig. 9
C
Θ
X2
A
B
C1
X1
Y
X
C2
Y1
Y2
D
C
D'
B
A
Fig. 10
D
C
A
D'
B
Fig. 11
C
P'
Q'
R
P
Q
A
B
R'
B'
C
A'
Fig. 13
A
B
C'
C
Fig. 12.
E
D
A
F
B
Fig. 15a
A
C
B
M
C
Fig. 14
F
A
B
X
Fig. 15b
A
B
C
M

